TEMA 2: PROGRAMACIÓN LINEAL.

2. 1. INTRODUCCIÓN.

La Programación Lineal (PL) puede considerarse como uno de los grandes avances científicos habidos durante la primera mitad del siglo XX y sin duda es una de las herramientas cuantitativas más extendidas, siendo habitual su uso en empresas y organizaciones de todo el mundo.

La PL estudia los problemas relativos a la asignación de recursos limitados entre actividades competitivas de forma óptima. Para ello, la PL emplea un modelo matemático que describe el problema a tratar. El adjetivo lineal indica que todas las relaciones funcionales matemáticas del modelo deben ser de carácter lineal. En cuanto al término programación, éste tiene el sentido de planificación, de formulación de un plan o programa que debe realizarse de manera óptima. Aunque de forma genérica un problema de PL suele estudiarse a través de un problema de asignación, en general, todo problema susceptible de ser expresado a través de un modelo matemático de PL se considera como tal problema de PL. El éxito de la PL tiene mucho que ver con la existencia de un algoritmo de resolución realmente eficiente: el método SIMPLEX.

El objetivo de este tema es introducir los aspectos más relevantes de la PL, que permiten desarrollar y resolver los problemas de PL. Para ello, abordaremos en primer lugar estudiaremos la formulación de los problemas de PL y, a continuación, presentaremos un procedimiento gráfico de solución de estos problemas.

2. 2. FORMULACIÓN DE LOS MODELOS.

Para un mejor seguimiento de este tema, creemos conveniente abordar cada una de las diferentes cuestiones planteadas a través de un ejemplo genérico, que sirva de hilo conductor y nos permita dar una visión integral de la PL. El ejemplo es el siguiente:

Una empresa embotelladora de bebidas refrescantes tiene dos productos principales D1 y D2, cuya producción se realiza en dos secciones, una de envasado y otra de embalaje de los productos. La capacidad semanal, en horas de trabajo, de la *sección de envasado es de 230 mientras que la sección de embalaje dispone de 250 horas de trabajo semanales. El envasado y embalaje de 1000 litros de ambos tipos de bebidas requieren la utilización del siguiente número de horas en cada sección:*

	D1	***D2***	***Disponibilidad***
Envasado	*2*	*1*	***230***
Embalaje	*1*	*2*	***250***

La empresa tiene una provisión casi ilimitada de materia prima para la producción de las bebidas, sin embargo se sabe que D2 tiene una demanda semanal nunca superior a los 120.000 litros.

Si estimamos un margen de beneficio de 30 céntimos de euro por litro para D1 y de 50 céntimos para D2, determinar el plan de producción semanal que hace máximo el beneficio de la empresa.

La formulación de un problema de PL significa plantear algebraicamente el modelo, para lo cual será necesario determinar las siguientes cuestiones:

1. Las *variables de decisión* del modelo, es decir aquéllas que señalan la decisión que se debe tomar. En nuestro ejemplo, el número de litros de bebida D1 y D2 que se deben envasar y embalar.
2. Las *limitaciones o restricciones* de que se imponen sobre dichas variables. En el ejemplo, los recursos escasos, es decir la capacidad de las secciones de envasado y embalaje.
3. La *función objetivo*, de manera que obtengamos una expresión matemática del objetivo que se pretende optimizar. En nuestro ejemplo, el beneficio máximo semanal.

De esta forma:

1. *Variables de decisión*: Número de litros de bebida que se envasarán y embalarán.

   X_1: Miles de litros bebida D1

   X_2: Miles de litros bebida D2
2. *Restricciones*: Capacidad de las secciones y demanda de D2.

2.1. Para la fabricación (envasado más embalaje) de 1000 litros de D1 se requieren 2 horas en envasado, mientras que la fabricación de 1000 litros de D2 necesita de 1 hora en esta sección, cuya capacidad es de 230 horas:

$$2X_1 + X_2 \leq 230 \qquad \text{(a)}$$

2.2. Para la fabricación (envasado más embalaje) de 1000 litros de D1 se requiere 1 hora en la sección de embalaje, mientras que la fabricación de 1000 litros de D2 necesita de 2 horas en esta sección, cuya capacidad total es de 250 horas

$$X_1 + 2X_2 \leq 250 \qquad \text{(b)}$$

2.3. La demanda semanal de D2 no supera los 120.000 litros, por lo que la empresa, para evitar inventarios innecesarios optará por no fabricar una cantidad superior a dicha demanda

$$X_2 \leq 120 \qquad \text{(c)}$$

3. *Función Objetivo*: Maximizar el beneficio semanal de la empresa. La producción de 1000 litros de D1 genera un beneficio de 300 € mientras que 1000 litros de D2 proporcionan un margen de 500 €, por lo que el beneficio semanal (Z) será:

$$Z = 300X_1 + 500X_2$$

Por tanto, el problema de PL se puede formular como sigue:

$$\begin{aligned}
&\mathit{Max}\ Z = 300X_1 + 500X_2 \\
&\textit{Sujeto a:} \\
&2X_1 + X_2 \leq 230 && (a) \\
&X_1 + 2X_2 \leq 250 && (b) \\
&X_2 \leq 120 && (c) \\
&X_1, X_2 \geq 0 && (d)
\end{aligned}$$

Las restricciones expresadas en (d) se denominan *Condiciones de No Negatividad* y aparecen en todo programa de PL, debido a que la resolución del mismo a través del algoritmo SIMPLEX requiere que las variables de decisión del problema tomen valores en el conjunto de los reales positivos (R^+).

2. 3. SOLUCIÓN GRÁFICA

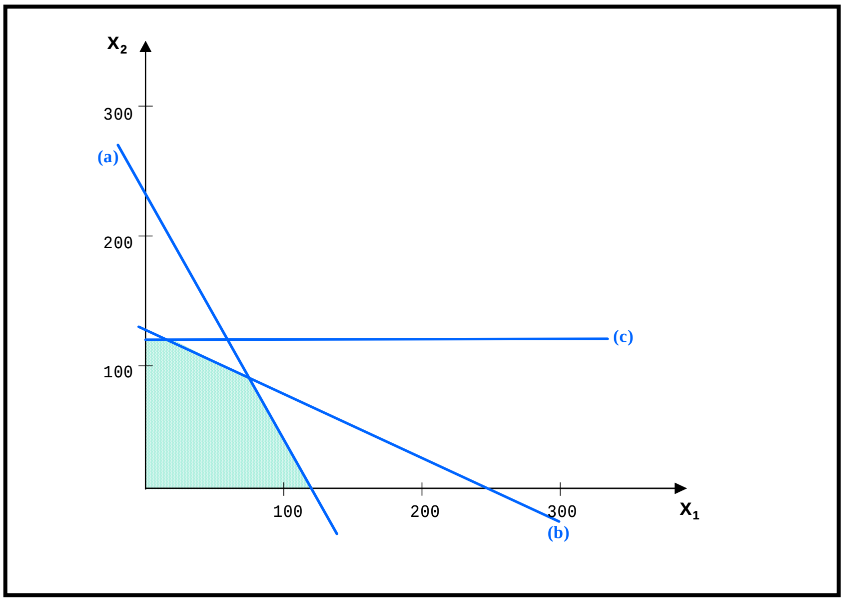
El conjunto formado por las restricciones del problema constituye el denominado *Conjunto de Soluciones Factibles* del problema o *Región Factible*. Al vector (X_1, X_2) se le denomina *Plan o Programa de Producción*, de manera que un plan de producción será factible si satisface simultáneamente todas las restricciones del problema lineal, es decir, si dicho vector pertenece a la región factible. Aquel programa factible que optimice el valor de la función objetivo será el *Plan o Programa Óptimo* (X_1^*, X_2^*).

El ejemplo propuesto se caracteriza porque el número de variables de decisión es igual a dos, lo que nos permitirá utilizar un *procedimiento gráfico de solución* para determinar el programa óptimo de producción (X_1^*, X_2^*)

Este procedimiento gráfico de solución consiste en representar, en primer lugar, la región factible, la cual quedará delimitada por las rectas que se obtienen al convertir las restricciones del problema (en nuestro ejemplo,≤) en ecuaciones (=).

Para el ejemplo que estamos utilizando, determinamos la región factible como el conjunto de puntos (X_1, X_2) contenido en el área delimitada por el eje de abcisas, el eje de ordenadas y las ecuaciones derivadas de las restricciones del problema (a), (b) y (c). El sentido de las restricciones indicará el conjunto de posibles valores que se considerarán; en este caso, al ser restricciones ≤ las rectas (a), (b) y (c) constituyen un límite superior para el conjunto de soluciones factibles que, por tanto, tomarán valores iguales o inferiores a los señalados por dichas rectas. Los ejes cartesianos, por su parte, delimitan las denominadas condiciones de no negatividad del problema (Figura 1).

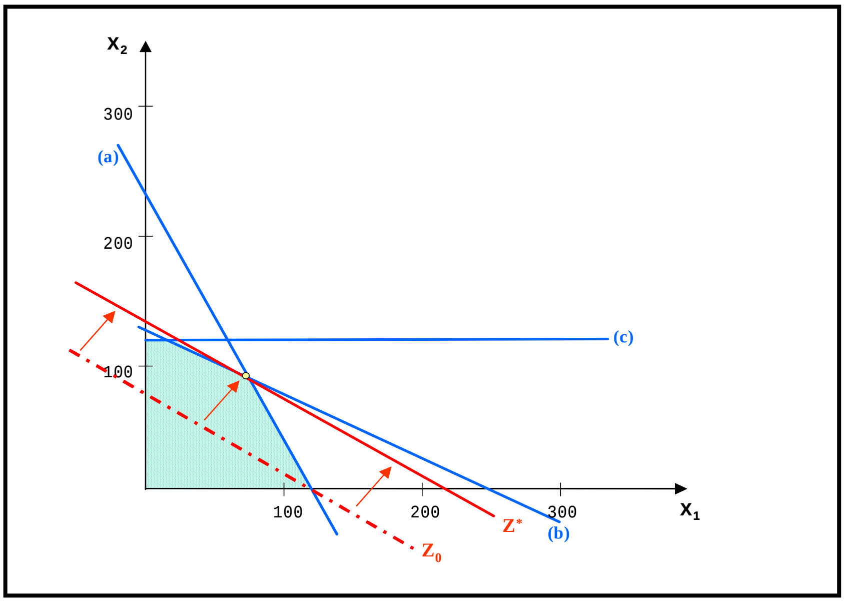
Figura 1: Región Factible



Una vez determinado el conjunto de candidatos a ser solución del problema, deberemos determinar aquél que optimice el valor de la función objetivo (Z). Para determinar gráficamente este vector (X_1^*, X_2^*), procederemos del siguiente modo:

1. Fijaremos un nivel arbitrario para la función objetivo Z, por ejemplo Z_0=34500, y determinamos la recta isobeneficio que definimos como aquélla formada por los puntos (X_1, X_2) que proporcionan el mismo nivel de beneficio $Z_0 = 34500 = 300X_1 + 500X_2$
2. Desplazamos paralelamente la recta Z_0, hacia el origen y hacia $+\infty$, para determinar en qué sentido se optimiza el valor de la función objetivo. En nuestro caso, a medida que nos alejamos del origen el valor de la función objetivo aumenta, por tanto buscaremos alejarnos lo más posible del punto (0, 0).
3. Desplazamos la recta isobeneficio paralelamente sobre el conjunto de soluciones factibles de manera que consigamos mejoras en el valor de Z, hasta alcanzar un punto de la región factible (que será uno de sus vértices) en el que el valor de la función objetivo es el máximo que se puede alcanzar para dicho conjunto de soluciones factibles. En nuestro ejemplo este punto queda determinado por la intersección de las rectas (a) y (b). (Figura 2).

Figura 2: Solución Óptima



De esta forma, la solución óptima al problema planteado es (X^*_1=70, X^*_2=90) es decir, el programa óptimo de producción implica fabricar 70000 litros de D1 y 90000 litros del producto D2, obteniendo un beneficio semanal de Z*=66000 euros.

2. 3. EJEMPLOS Y EJERCICIOS

Realizar un análisis gráfico del problema propuesto en los siguientes casos:

a) Introducción de una nueva restricción: $X_1 \geq 150$

b) Cambio de sentido de las desigualdades a) y b):

$$2X_1 + X_2 \geq 230$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 250$$

c) Disminución del margen de beneficio para D1 hasta los 20 céntimos por litro

d) Incremento de la disponibilidad de horas semanales de la sección de embalaje hasta las 350 horas.