TEMA 3: EL MÉTODO SIMPLEX

El uso de este procedimiento gráfico para resolver problemas de PL queda limitado a problemas con dos variables de decisión, de manera que el problema pueda representarse en un diagrama cartesiano. Habitualmente la solución a los problemas de PL se obtiene a través de uno de los algoritmos más eficientes que existen en la Investigación Operativa: el algoritmo SIMPLEX.

El SIMPLEX es un procedimiento iterativo de búsqueda de la solución óptima en problemas de PL, ideado por George Dantzig en 1947 y es, sin duda, uno de los algoritmos más conocidos y utilizados debido a su simplicidad y efectividad.

En este epígrafe veremos el planteamiento y solución de un problema de PL a través de este algoritmo. Para un mejor seguimiento de la exposición, utilizaremos el planteamiento genérico de los problemas de PL como problemas de asignación de recursos limitados entre actividades competitivas, visto en el epígrafe anterior, y seguiremos utilizando el ejemplo propuesto anteriormente. Antes de continuar, resulta necesario definir algunos conceptos básicos:

1. *Factores productivos*: son los medios empleados para la obtención de la producción. Pueden ser limitados (A_i) y, por tanto, originan restricciones o ilimitados.
2. *Vector existencias (P_0)*: es un vector columna cuyos componentes son las cantidades disponibles de cada uno de los factores productivos limitados A_i. Dados m factores productivos limitados, el vector existencias será:

$$P_0 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

3. *Técnica*: cualquier combinación de los diferentes factores productivos,
4. *Proceso productivo*: supone la transformación de los factores productivos en bienes o servicios, de acuerdo con una técnica determinada.

5. *Vector proceso (P_j)*: es un vector columna cuyos componentes indican las cantidades necesarias de los distintos factores productivos para la realización del proceso j-ésimo.

$$P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

siendo a_{ij} la cantidad de factor productivo *i* necesaria para realizar el proceso *j*.

6. *Nivel del proceso (x_j)*: indica la intensidad de utilización de los distintos factores productivos en el proceso j.
7. *Rendimiento del proceso (c_j):* señala la diferencia entre los ingresos y los costes que se espera originen la realización del proceso.
8. *Programa de producción:* Plan elaborado por la organización consistente en la realización de uno o varios procesos productivos a unos determinados niveles.
9. *Rendimiento de un programa:* es la suma algebraica de los rendimientos obtenidos por los procesos P_j que lo integran, realizados a unos niveles determinados X_j.
10. *Matriz tecnológica:* constituida por los diferentes vectores proceso P_j.

$$M_t = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_j & \cdots & P_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

11. *Vector de rendimientos:* es un vector fila cuyas componentes son los rendimientos de los procesos que forman parte de la función objetivo:

$$C = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_j \quad \cdots \quad c_n)$$

El desarrollo del algoritmo SIMPLEX requiere el establecimiento de ciertas hipótesis de partida en los problemas de PL, que señalamos a continuación:

1. *Proporcionalidad*: de manera que la contribución de cada actividad al valor de la función objetivo es proporcional a su nivel de utilización y, de igual forma, es también proporcional al valor del término independiente de cada restricción.
2. *Aditividad*: cada función en un modelo de PL (ya sea la función objetivo o el lado izquierdo de las restricciones del modelo) es igual la suma de las contribuciones individuales de las actividades respectivas. La combinación de varios procesos emplea, en conjunto, la suma de todos los factores exigidos individualmente a cada uno de ellos, es decir, no se permite la existencia de productos cruzados.
3. *Divisibilidad*: Las variables de decisión en un modelo de PL podrán tener cualquier valor, incluyendo valores no enteros, que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad.
4. *Certidumbre*: Los parámetros del modelo quedarán determinados de manera inequívoca.

Bajo estas premisas, el planteamiento de un problema de programación lineal responde a la siguiente estructura:

$$
\begin{array}{l}
\textit{Optimizar } Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n \\
\textit{sujeto a}: \\
\qquad a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n \le A_1 \\
\qquad a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n \le A_2 \\
\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \cdots + a_{mn} X_n \le A_m \\
\qquad\qquad X_1, X_2, \cdots, X_n \ge 0
\end{array}
$$

El desarrollo del algoritmo SIMPLEX parte de un Programa Base formado por vectores unitarios sobre los que se realizan iteraciones, de manera que, en cada una de estas iteraciones, la matriz tecnológica asociada al programa de producción es una matriz identidad. Las etapas que seguiremos en el desarrollo de este algoritmo serán las siguientes:

1. *Convertir las restricciones del problema en igualdades*, introduciendo para ello variables de holgura (h_j) con coeficiente unitario que entrarán en el lado izquierdo de la restricción sumando en restricciones $\leq$, o restando en restricciones $\geq$.
2. *Obtener el Programa Base*, tomando un vector unitario de cada una de las restricciones del problema, de acuerdo con el siguiente orden:
   a. Escoger aquellas variables de holgura con coeficiente unitario y el mismo signo que el término independiente.
   b. En su defecto, elegir aquella variable X_j que aparezca en una sola restricción y que tenga el mismo signo que el término independiente.
   c. En su defecto, introducir en aquellas restricciones de las que aún no se haya obtenido ningún vector unitario, una variable artificial (K_j), afectada de un rendimiento –M si se está maximizando la función objetivo, o de un rendimiento +M si se está minimizando, y con coeficiente unitario.

Para el ejemplo que venimos utilizando, la conversión de las restricciones y la selección del programa base se realizaría como sigue:

$$Max\ Z = 300X_1 + 500X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 \leq 230 \qquad (a)$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 250 \qquad (b)$$
$$X_2 \leq 120 \qquad (c)$$
$$X_1, X_2 \geq 0 \qquad (d)$$

En primer lugar, realizamos la conversión de las restricciones en ecuaciones:

$$2X_1 + X_2 + \boldsymbol{h_1} = 230 \qquad (a)$$

$$X_1 + 2X_2 + \boldsymbol{h_2} = 250 \qquad (b)$$

$$X_2 + \boldsymbol{h_3} = 120 \qquad (c)$$

y, a continuación, determinamos el Programa Base, seleccionando de cada ecuación el vector unitario de la correspondiente variable de holgura, de manera que el programa base quedará constituido por los procesos de holgura (h_1, h_2, h_3).

Una vez obtenido un Programa Base inicial comprobaremos si se trata del Programa Óptimo, a través de una Prueba de Optimalidad. Para la realización de esta prueba y para las, en su caso, posteriores iteraciones del algoritmo, construiremos una Tabla que nos permita realizar estas tareas y, además, presentar la información más relevante del problema de PL.

3. *Obtención de la Tabla del SIMPLEX*, que nos servirá para solucionar el problema de PL planteado. Esta tabla queda constituida por los siguientes elementos:

Figura 3: Tabla genérica del Simplex

		c_1	c_2	…	c_n	
		$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	…	$\mathbf{X_n}$	
c_{h_1}	$\mathbf{h_1}$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	A_1
c_{h_2}	$\mathbf{h_2}$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	A_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
c_{h_m}	$\mathbf{h_m}$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	A_n
		z_1	z_2	…	z_n	
		w_1	w_2	…	w_n	

La primera fila de la tabla contiene el vector de rendimientos directos de los procesos (C). La segunda fila señala los procesos que conforman el programa de PL, es decir, las variables de decisión del problema, en la que incluiremos tanto las variables principales (X_j) como las auxiliares (h_j, K_j). La primera columna indica los rendimientos directos de los procesos que forman parte del Programa Base. La segunda columna recoge los procesos que configuran el Programa Base (inicialmente, las variables de holgura). La última columna queda constituida por los niveles de utilización de los procesos básicos (los que forman parte del programa base). En la primera tabla del simples, dicha columna será el vector existencias P_0. La penúltima fila indica el vector de rendimientos indirectos $Z = (z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n)$, y la última fila señala el vector de rendimientos marginales $W = (w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n)$. El cálculo y el significado de estos dos vectores se indican más adelante. Por último, el cuerpo central de la tabla recoge la Matriz tecnológica del problema, M_t.

Con los datos de nuestro ejemplo, la Tabla del SIMPLEX será:

Tabla 1 del SIMPLEX

		300	500	0	0	0	
		X_1	**X_2**	**h_1**	**h_2**	**h_3**	
0	**h_1**	2	1	1	0	0	230
0	**h_2**	1	2	0	1	0	250
0	**h_3**	0	1	0	0	1	120
		0	0	0	0	0	
		300	500	0	0	0	

Observamos que la matriz tecnológica asociada a los procesos que forman el programa base (h_1, h_2, h_3) es la matriz identidad.

El vector de rendimientos indirectos (Z) se calcula para cada proceso j, es decir, para cada variable de decisión, como el producto vectorial entre el vector de rendimientos directos de los procesos que forman parte del programa base (primera columna, C^b) y el correspondiente vector proceso (P_j):

$$z_1 = C^b \times P_1 = (0 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_2 = C^b \times P_2 = (0 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_3 = C^b \times P_3 = (0 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_4 = C^b \times P_4 = (0 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_5 = C^b \times P_5 = (0 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Por su parte, el rendimiento marginal del proceso *j* (w_j) se obtiene como diferencia entre su rendimiento directo e indirecto: $w_j = c_j - z_j$.

El valor de la función objetivo para los vectores proceso que forman parte del programa base es:

$$Z^* = 300X_1 + 500X_2 = 0$$

4. *Prueba de Optimalidad:* el programa base será óptimo si y sólo si el rendimiento marginal de todos los procesos es no positivo en problemas de maximización, o no negativo en problemas de minimización.

En nuestro ejemplo los rendimientos marginales de los procesos correspondientes a las variables principales X_1 y X_2 es positivo, por lo tanto el programa base alcanzado no es óptimo y procederemos a iterar el algoritmo.

El hecho de que el programa base no sea el plan óptimo significa que los procesos que lo integran no optimizan el valor de la función objetivo, es decir alguno de ellos no debería estar presente en esta configuración del programa base. Es necesario, por tanto, sustituir alguno de los procesos que integran dicha base por algún otro proceso que no se encuentre actualmente en ella. Para determinar el proceso que saldrá de la base y el proceso que entrará en ella, utilizaremos el siguiente procedimiento de actuación:

5. *Iteración del algoritmo del SIMPLEX:*
   a. Determinación del proceso entrante: Entrará en el programa base aquel proceso con mayor rendimiento marginal positivo, si estamos maximizando, o menor rendimiento marginal negativo, si se trata de un problema de minimización. En nuestro ejemplo, al tratarse de un problema de maximización, seleccionaremos como proceso entrante el de mayor rendimiento marginal (w_j) de entre los procesos con rendimiento marginal positivo, es decir, entrará el proceso correspondiente a X_2, cuyo rendimiento marginal es w_2=500.
   b. Determinación del proceso saliente: Dado que entra un nuevo proceso en el programa base, deberá salir uno de los procesos existentes. Para ello, denominaremos a la columna de la matriz tecnológica correspondiente al proceso entrante, *"columna pivote"*. El proceso saliente será aquél con menor valor, de entre todos los positivos, del cociente entre su nivel de utilización (x_j) y su elemento correspondiente en la "columna pivote".

En el ejemplo, los procesos que pueden salir de la base son los correspondientes a las variables de holgura (h_1, h_2, h_3), que denominamos P_3, P_4, P_5,, respectivamente. Para estos procesos, los correspondientes cocientes serán:

$$P_3 : \frac{x_3}{a_{12}} = \frac{230}{1} = 230$$
$$P_4 : \frac{x_4}{a_{22}} = \frac{250}{2} = 125$$
$$P_5 : \frac{x_5}{a_{32}} = \frac{120}{1} = 120$$

donde $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ es, en este ejemplo, la columna pivote para esta iteración de la Tabla del SIMPLEX.

Seleccionamos, por tanto, el proceso con menor cociente de entre los positivos, es decir, P_5, que es el correspondiente a la variable de holgura h_3. De esta forma, el nuevo programa base para este problema estará formado por los procesos correspondientes a h_1 y h_2, que permanecen en la base, y por el proceso P_2, que entra en la base en sustitución del proceso P_5. Llegados a este punto, construiremos una nueva tabla del SIMPLEX para este nuevo programa base, calculando los nuevos coeficientes tecnológicos (a_{ij}), los niveles de utilización (x_j) y, a partir de éstos, los rendimientos indirectos y marginales de los procesos (z_j, w_j). Una vez completada la tabla, aplicaremos la prueba de optimalidad al nuevo programa base.

Para determinar los nuevos elementos de la tabla, procederemos del siguiente modo:

1. Los elementos correspondientes al nuevo proceso, al proceso entrante, se obtienen dividiendo los elementos de dicha fila en la tabla anterior entre el *"elemento pivote"*. El elemento pivote es aquél en el que se cruza la columna pivote con la fila del proceso saliente. A los elementos restantes de la columna pivote, se les denomina *semipivotes*.
2. Los elementos correspondientes a los procesos que permanecen en la base respecto a la última tabla se calculan restando al elemento original, el producto del semipivote del proceso por el elemento correspondiente del proceso entrante.
3. Una vez completada la nueva matriz tecnológica y determinados los niveles de utilización de los procesos, se determinarán el rendimiento indirecto y marginal de cada uno de ellos.

Figura 3: Iteración del Simplex

		300	500	0	0	0	
		X_1	**X_2**	**h_1**	**h_2**	**h_3**	
0	**h_1**	2	1	1	0	0	230
0	**h_2**	1	2	0	1	0	250
0	**h_3**	0	$\boxed{1}$	0	0	1	120
		0	0	0	0	0	
		300	500	0	0	0	

Proceso Saliente

Proceso Entrante

Elemento Pivote

En el ejemplo, el proceso entrante es P_2, que ocupará el lugar de la variable de holgura h_3. Los elementos del proceso entrante (coeficientes tecnológicos y nivel de utilización) en la nueva tabla se obtienen dividiendo los elementos correspondientes en la tabla anterior entre el elemento pivote:

$$a'_{3j} = \frac{a_{3j}}{pivote}; \quad j = 1, 2, \ldots, 5$$
$$x'_3 = \frac{x_3}{pivote}$$

Los elementos de los procesos que permanecen en el programa base son los correspondientes a las variables de holgura h_1 y h_2, para las cuales calcularemos sus respectivos elementos en la nueva tabla. Así, para h_1:

$$a'_{1j} = a_{1j} - semipivote \times a'_{3j}; \quad j = 1, 2, \ldots, 5.$$
$$x'_1 = x_1 - semipivote \times x'_3$$

Una vez calculados los coeficientes tecnológicos del nuevo programa base, determinamos los rendimientos indirectos y marginales de los procesos y comprobamos la optimalidad de la base.

Tabla 2 del SIMPLEX

		300	500	0	0	0	
		X_1	**X_2**	**h_1**	**h_2**	**h_3**	
0	**h_1**	2	0	1	0	-1	110
0	**h_2**	1	0	0	1	-2	10
500	**X_2**	0	1	0	0	1	120
		0	500	0	0	500	
		300	0	0	0	-500	

Observamos que la matriz asociada a los procesos que forman el programa base es la matriz identidad, siendo el valor de la función objetivo $Z^{*}= 300X_1 + 500X_2 = 300\times0 + 500\times120 = 60000$. Esta iteración ha incrementado el valor de la función objetivo, de acuerdo con el argumento de optimización del problema. Sin embargo, esta base no se corresponde con el programa óptimo, pues aún existen procesos con rendimiento marginal positivo, en este caso P_1. Por tanto, iteramos nuevamente el algoritmo determinando el proceso entrante como aquél con mayor rendimiento marginal entre los positivos (P_1), y calculando el proceso saliente a través del cociente entre el nivel de utilización y su correspondiente elemento en la columna pivote, y seleccionando el de menor ratio entre los positivos (h_2). Esta nueva base (h_1, X_1, X_2) proporciona la siguiente tabla del Simplex:

Tabla 3 del SIMPLEX

		300	500	0	0	0	
		X_1	**X_2**	**h_1**	**h_2**	**h_3**	
0	**h_1**	0	0	1	-2	3	90
300	**X_1**	1	0	0	1	-2	10
500	**X_2**	0	1	0	0	1	120
		300	500	0	300	-100	
		0	0	0	-300	100	

Como resultado de esta iteración obtenemos un valor de la función objetivo $Z^* = 300X_1 + 500X_2 = 300\times10 + 500\times120 = 63000$, superior al valor de Z en la anterior iteración. En cualquier caso, esta nueva base tampoco proporciona el programa óptimo puesto que el proceso P_5 correspondiente a la variable de holgura h_3 tiene rendimiento marginal positivo y debe entrar en la base para maximizar el valor de la función objetivo Z.

El nuevo proceso entrante será el correspondiente a la variable de holgura h_3, saliendo el proceso básico h_1. Iterando el algoritmo del simplex obtendremos la siguiente tabla:

Tabla 4 del SIMPLEX

		300	500	0	0	0	
		$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{h_1}$	$\mathbf{h_2}$	$\mathbf{h_3}$	
0	$\mathbf{h_3}$	0	0	1/3	-2/3	1	30
300	$\mathbf{X_1}$	1	0	2/3	-1/3	0	70
500	$\mathbf{X_2}$	0	1	-1/3	2/3	0	90
		300	500	100/3	700/3	0	
		0	0	-100/3	-700/3	0	

Observamos que el rendimiento marginal de los procesos es no positivo y, al tratarse de un problema de maximización, podemos concluir que estamos en presencia de la solución óptima, que además es un solución factible (niveles de utilización no negativos). El valor de la función objetivo será $Z^* = 300\times70 + 500\times90 = 66000$, es decir, el Plan de Producción que hace máximo el beneficio de esta empresa consiste en fabricar 90000 litros de la bebida D1 y 70000 litros de la bebida D2, generando un beneficio semanal de 66000 €, tal y como ya habíamos derivado en el análisis gráfico del problema.

Además de por las variables principales X_1 y X_2, el programa base está constituido por la variable de holgura h_3, la cual tiene, naturalmente, un significado relevante en la solución de este problema. Esta variable de holgura pertenece a la restricción (c) del problema, que señalaba una limitación en cuanto a la demanda semanal de la bebida D2 ($X_2 \leq 120$). El nivel de utilización del proceso básico correspondiente a esta variable de holgura, al ser un nivel positivo, indica la existencia de una demanda semanal para D2 inferior a la demanda máxima estimada. Recordemos que en nuestro problema tipo de programación lineal, el vector de disponibilidades P_0 señalaba la cantidad disponible de cada uno de los factores productivos limitados, y que dichas limitaciones generaban una serie de restricciones a cada una de las cuales asociamos una variable de holgura. Un valor positivo de una variable de holgura en el programa óptimo de producción indicará la existencia de cantidades disponibles del factor productivo correspondiente, en una cantidad igual a su nivel de utilización. Si el nivel de utilización de la variable de holgura es nulo, se estará indicando que el plan de producción agota la cantidad disponible del factor productivo correspondiente. En nuestro ejemplo, el conjunto de restricciones daba lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$2X_1 + X_2 + \boldsymbol{h_1} = 230 \qquad (a)$$

$$X_1 + 2X_2 + \boldsymbol{h_2} = 250 \qquad (b)$$

$$X_2 + \boldsymbol{h_3} = 120 \qquad (c)$$

que se satisfacen para la solución óptima alcanzada:

$$\begin{aligned} 2X_1^* + X_2^* + h_1 &= 2\times 70 + 90 + 0 = 230 \\ X_1^* + 2X_2^* + h_2 &= 70 + 2\times 90 + 0 = 250 \\ 2X_2^* + h_3^* &= 2\times 90 + 30 = 120 \end{aligned}$$

Las variables de holgura que no forman parte de la solución óptima (h_1, h_2) tienen un nivel de utilización nulo que señala que el plan óptimo de producción (X_1^*, X_2^*) agota la disponibilidad del recurso productivo correspondiente (A_1, A_2). Por su parte, la variable de holgura que forma parte del programa base en el óptimo (h_3) y tiene, por tanto, un nivel de utilización positivo, indica la existencia de disponibilidad del factor productivo correspondiente una vez completado el programa óptimo de producción.